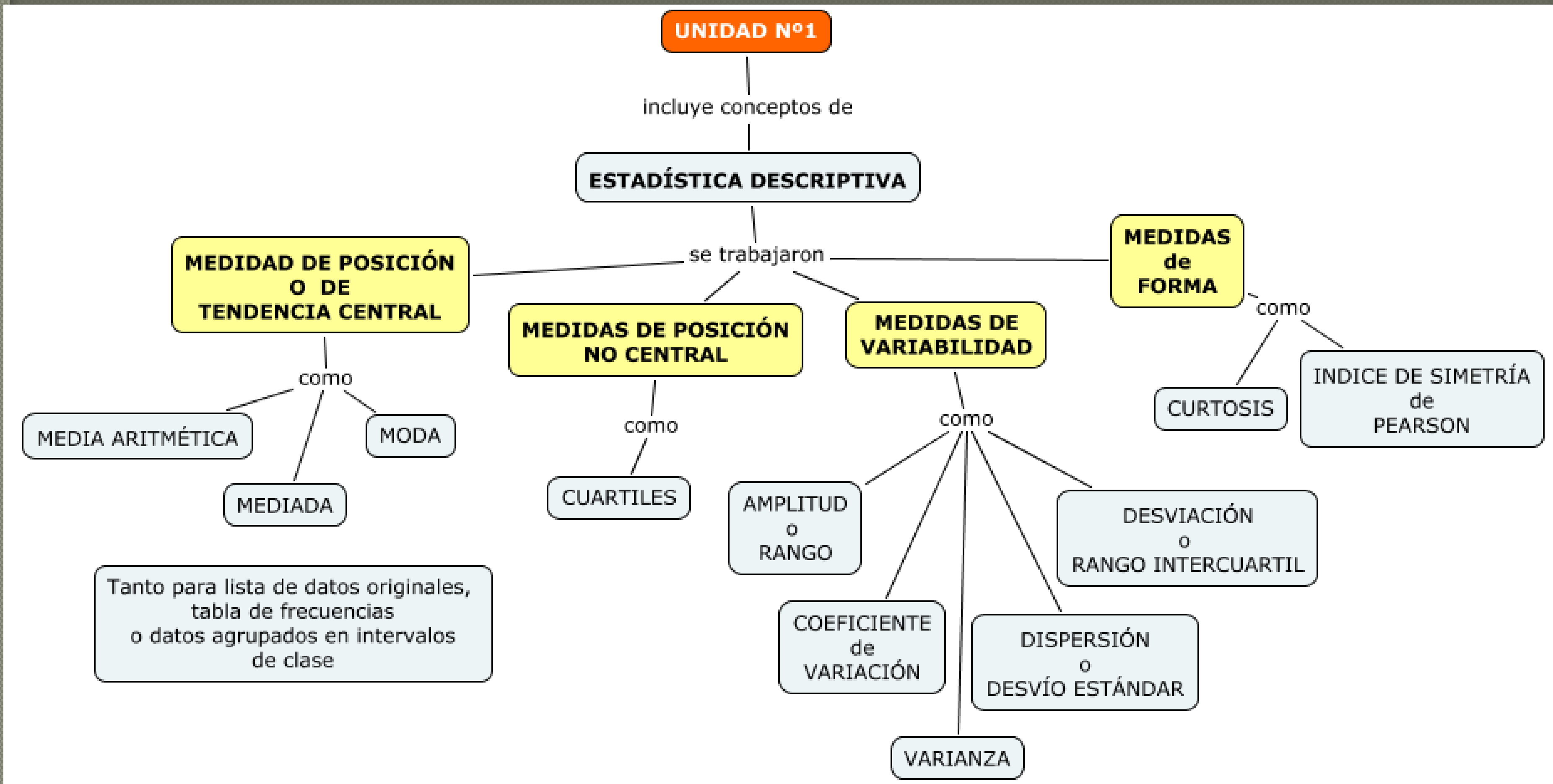
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA I

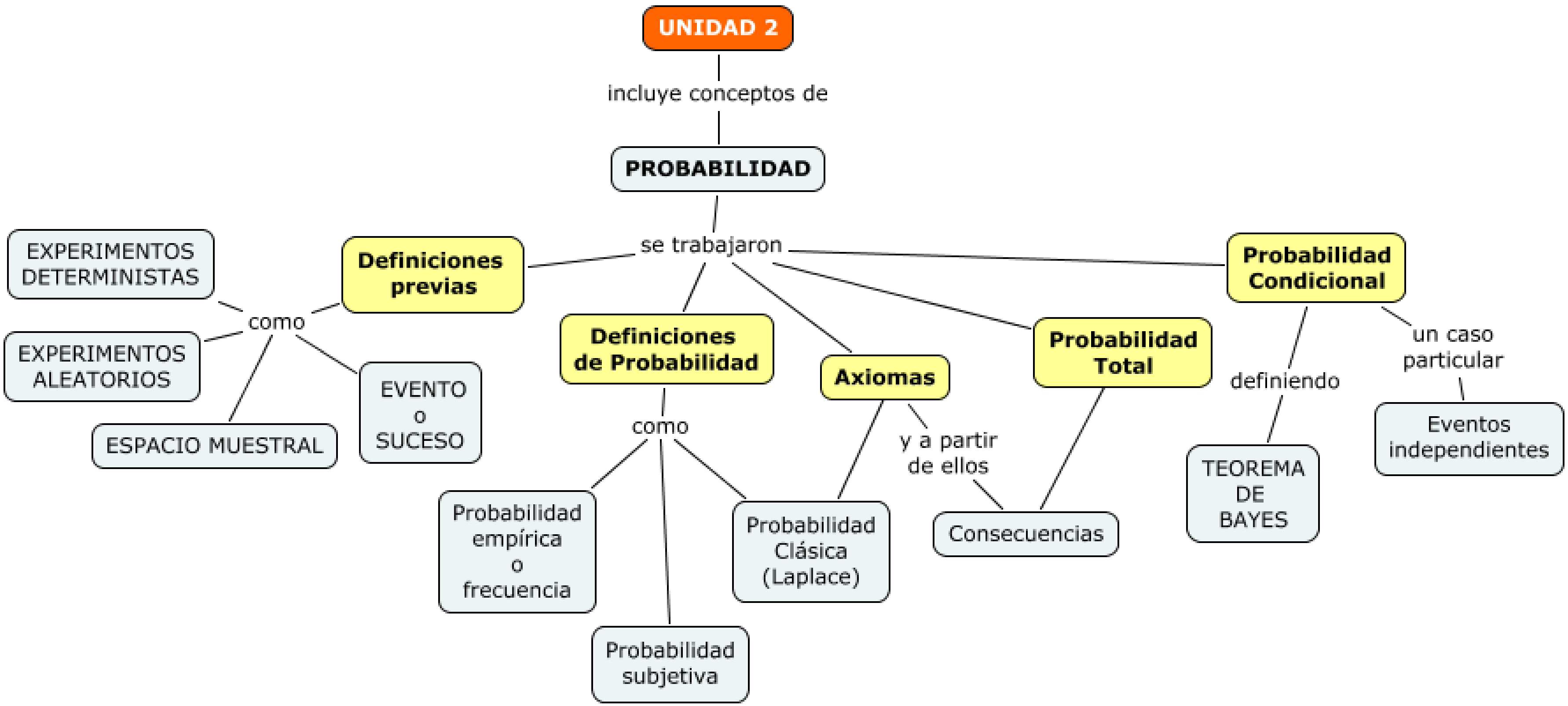
UNIDAD Nº3

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Año 2011
Mg. Lucía C. Sacco

Unidad Nº1


UNIDAD Nº1
incluye conceptos de
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA
se trabajaron
MEDIDAD DE POSICIÓN O DE TENDENCIA CENTRAL
MEDIDAS DE POSICIÓN NO CENTRAL
MEDIDAS DE VARIABILIDAD
MEDIDAS de FORMA
como
MEDIA ARITMÉTICA
MODA
MEDIADA
como
CUARTILES
como
AMPLITUD o RANGO
COEFICIENTE de VARIACIÓN
VARIANZA
DISPERSIÓN o DESVÍO ESTÁNDAR
DESVIACIÓN o RANGO INTERCUARTIL
como
CURTOSIS
INDICE DE SIMETRÍA de PEARSON
Tanto para lista de datos originales, tabla de frecuencias o datos agrupados en intervalos de clase

Unidad Nº2



UNIDAD 2
incluye conceptos de
PROBABILIDAD
se trabajaron
Definiciones previas
como
EXPERIMENTOS DETERMINISTAS
EXPERIMENTOS ALEATORIOS
ESPACIO MUESTRAL
EVENTO o SUCESO
Definiciones de Probabilidad
como
Probabilidad empírica o frecuencia
Probabilidad subjetiva
Probabilidad Clásica (Laplace)
Axiomas
y a partir de ellos
Consecuencias
Probabilidad Total
Probabilidad Condicional
definiendo
TEOREMA DE BAYES
un caso particular
Eventos independientes

UNIDAD Nº3

Variables aleatorias unidimensionales. Distribuciones.

Noción general de una variable aleatoria. Variables aleatorias discretas y continuas. Definición y ejemplos.

Variable aleatoria discreta. Distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta. Función de distribución o función de probabilidad acumulada.
Características: Esperanza matemática y desvío estándar de una variable aleatoria discreta. Variancia y desvío estándar de una variable aleatoria discreta.

Distribuciones discreta: Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica y de Poisson.

Distribución binomial de probabilidad. Aplicación. Características de la distribución binomial. Esperanza y desvío estándar de una distribución binomial.

La variable aleatoria de Poisson. Distribución de Poisson. Definición. Teorema. La distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial.
Aplicación a problemas de espera. Ajuste de datos estadísticos a la distribución de Poisson.

Variables aleatorias continuas. La distribución normal. Propiedades. Distribución normal como límite de la distribución binomial. Integración de la función de probabilidad. Problemas de aplicación.

La ley de los grandes números. Teorema central del límite.

Variable Aleatoria Unidimensional

Una variable aleatoria numérica es un fenómeno de interés cuyos resultados se pueden expresar en números.

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas:

- DISCRETA: La variable aleatoria X se dice que es discreta si los números asignados a los sucesos elementales de E son puntos aislados. Sus posibles valores constituyen un conjunto finito o infinito numerable. Por ejemplo, supongamos el experimento consistente en lanzar tres veces una moneda no trucada; si consideramos la variable aleatoria X=número de "caras" obtenidas en los tres lanzamientos, los valores que puede tomar esta variable aleatoria son finitos (0, 1, 2, 3).
- CONTINUA: La variable aleatoria X será continua si los valores asignados pueden ser cualesquiera, dentro de ciertos intervalos, es decir, puede tomar cualquier valor de ***R***. Por ejemplo, si consideramos el experimento aleatorio consistente en medir el nivel de agua en un embalse y tomamos la variable aleatoria X="nivel de agua", esta puede tomar valores entre 0 y más infinito.

Distribución de probabilidad

Variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

Parámetros

Distribuciones más conocidas

Sea un espacio probabilístico y sea X una variable aleatoria discreta que toma como posibles valores x_1, x_2,.....x_n.

Al conjunto de pares ordenados (x_i ; P(x_i)) se lo denomina **función de probabilidad** o **distribución de probabilidad** o simplemente distribución de la variable aleatoria x_i.

Lo simbolizamos en la siguiente tabla:

X	P(X=x_i)
x_1	P(x_1)
x_2	P(x_2)
x_3	P(x_2)
...	....

Las condiciones que cumple la **Distribución de Probabilidad** son:

(a) P(x_i) ≥ 0 para cualquier valor de x_i

(b) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$ que se denomina **condición de cierre** de la distribución.

Ejemplos 3, 4 y 5 en la Unidad Nº3

Generalmente, cuando consideramos una variable aleatoria y su correspondiente función de probabilidad, la media aritmética de esta variable aleatoria se denomina **esperanza matemática.** La media μ de una distribución de probabilidad es el valor esperado o esperanza de su variable aleatoria.

Esperanza matemática

La esperanza de una variable aleatoria discreta es un promedio ponderado de todos los resultados posibles.

La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta, se calcula como la suma de cada valor que toma la variable multiplicado por su respectiva probabilidad

En símbolos
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; P(x_i) = \mu$$

Prácticamente, la esperanza matemática calcula el valor esperado promedio de una variable aleatoria el cual está en función de la probabilidad asignada a cada uno de los valores que toma dicha variable.

Varianza

La varianza, de una variable aleatoria discreta, se define como la suma de los desvíos de cada valor que toma la Variable aleatoria con respecto a la esperanza matemática, elevados al cuadrado y multiplicados por su respectiva probabilidad.

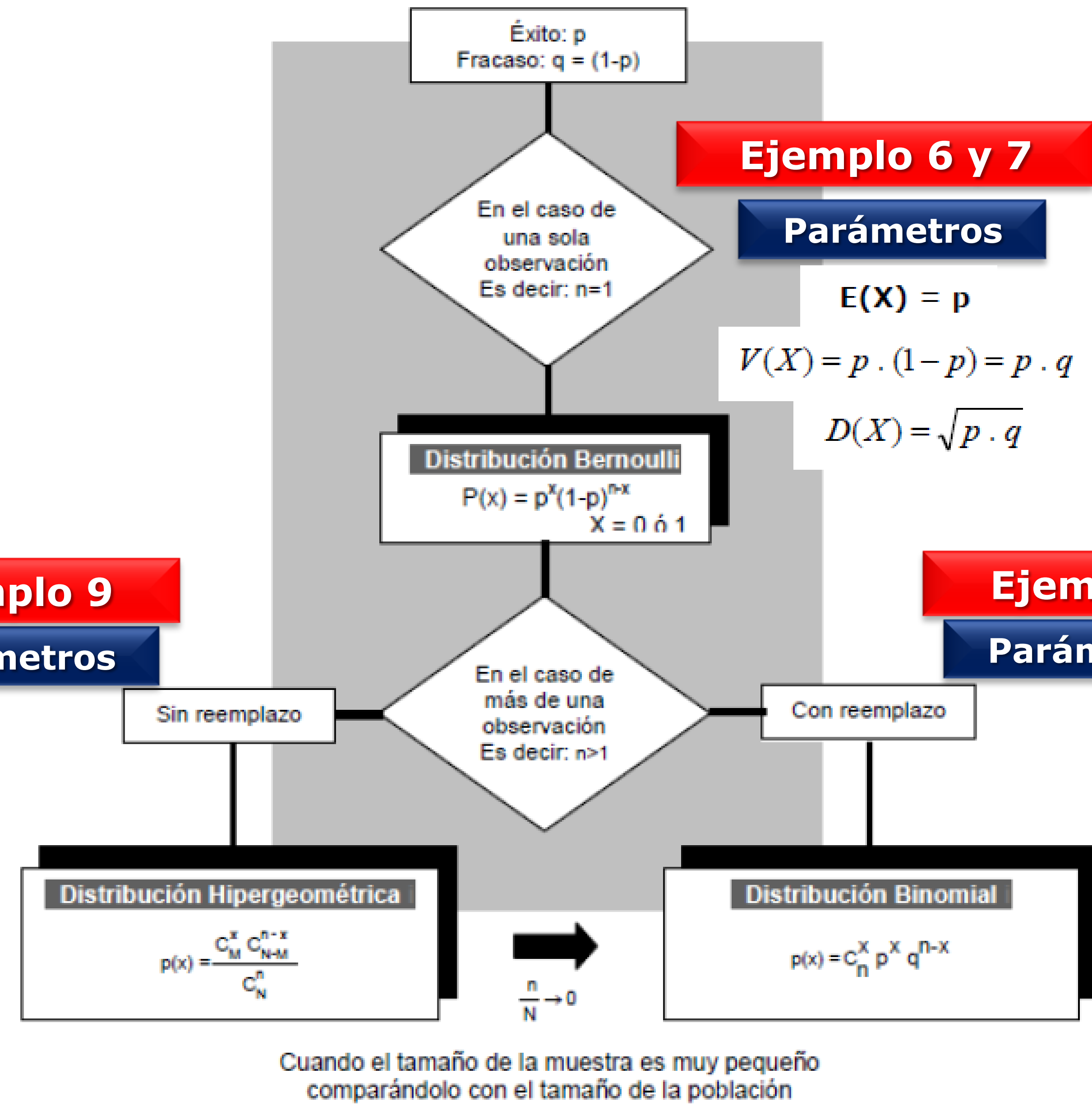
En símbolos
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 P(x_i)$$

Desviación estándar

También en esta situación se puede obtener la desviación estándar como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 P(x_i)}$$

Ejemplo 3 en la Unidad Nº3



Ejemplo 6 y 7

Parámetros

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p \, . \, (1-p) = p \, . \, q$$

$$D(X) = \sqrt{p \, . \, q}$$

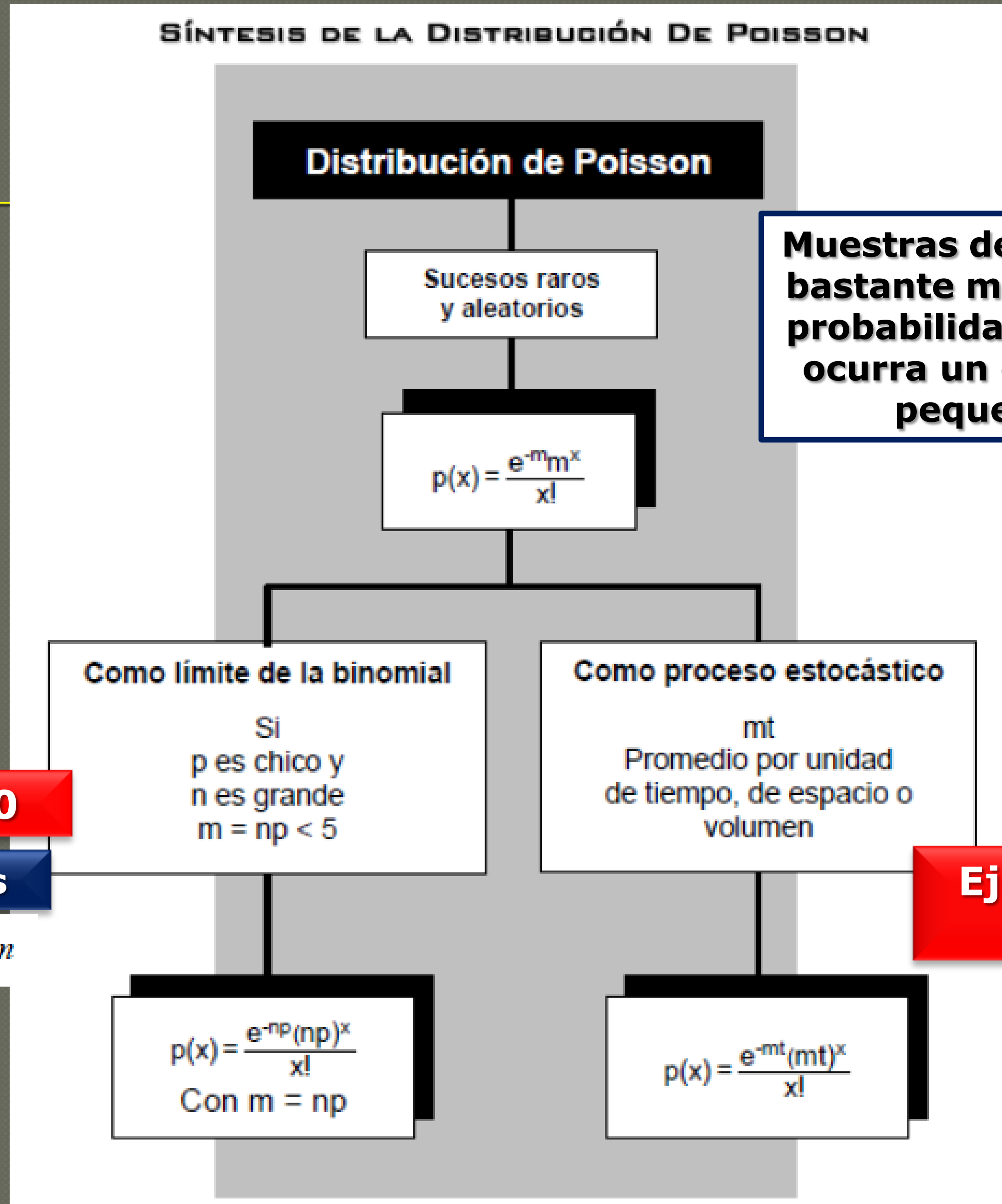
Ejemplo 9

Parámetros

Ejemplo 8

Parámetros

Uso de tablas



Muestras de tamaño bastante mayor y la probabilidad de que ocurra un éxito es pequeña

Ejemplo 10

Parámetros

$$E(X) = V(X) = m$$

Ejemplo 11 y 12

Distribución de probabilidad

Variable aleatoria continua

Función de densidad de probabilidad

Distribución Normal

Función densidad

Para calcular probabilidades asociadas con sectores o intervalos es conveniente usar una expresión en x o una función no negativa de x, representada por $f(x)$ y que se conoce con el nombre de **función de densidad de probabilidad.**

Esta función densidad de probabilidad satisface:

a) $f(x) \geq 0$ para todo x

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c) Para cualquier a, b, tal que $-\infty < a < b < +\infty$ tenemos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

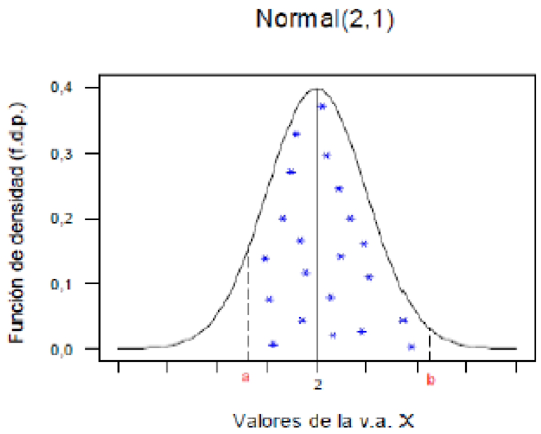
Distribución Normal

Diremos que la variable aleatoria X se distribuye normalmente con parámetros $E(X) = \mu$ y $\sigma = \sqrt{V(X)}$ (X ~ N (μ, σ)), si la función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

, para $-\infty < x < +\infty$ y la podemos representar para distintos valores de σ:

Cuanto más pequeña sea σ, tanto más concentrada resulta la masa de las distribución en el entorno del punto x = μ



Las características más generales de esta curva son:

- Tiene forma de campana, siendo simétrica con respecto a μ.
- La media, mediana y modo coinciden.
- Es asintótica con respecto al eje x.
- La distribución normal queda completamente determinada por los valores μ y σ es decir que existe una curva para cada par de estos valores.
- El rango intercuartil es aproximadamente igual a 1,33 σ

No existe una sola distribución de probabilidad normal, sino una "familia" de ellas. Cada una de las distribuciones puede tener una media (μ) o una desviación estándar distinta (σ). Por tanto, el número de distribuciones normales es ilimitado y sería imposible proporcionar una tabla de probabilidades para cada combinación de μ y σ.

Distribución Normal Estándar

Ejemplo 13

Uso de tablas Y applets

Para resolver este problema, se utiliza un solo "miembro" de la familia de distribuciones normales, aquella cuya media es 0 y desviación estándar 1 que es la que se conoce como **distribución estándar normal**, de forma que todas las distribuciones normales pueden convertirse a la estándar, restando la media de cada observación y dividiendo por la desviación estándar. Primero, convertiremos la distribución real en una distribución normal estándar utilizando un valor llamado **estadístico Z** que será la distancia entre un valor seleccionado, designado X, y la media μ, dividida por la desviación estándar σ.

Entonces, dada una variable aleatoria continua X ~ N (μ, σ), la variable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \approx N(0,1)$. Efectivamente:

$$E(Z) = E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[x-\mu] = \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] = 0$$ **(Esperanza matemática)**

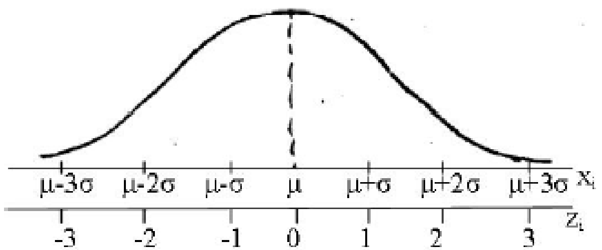
$$V(Z) = V\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}V[x-\mu] = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$$ **(Varianza)**

La expresión de la **función de densidad** es la siguiente $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

De esta manera, un valor Z mide la distancia entre un valor especificado de X y la media aritmética, en las unidades de la desviación estándar.

Por su condición de simetría, dos valores diferentes de x_i (o de z_i) que muestran la misma desviación en valor absoluto de μ tienen la misma densidad de probabilidad.

La transformación que sufre el eje de las x será:



Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Mg. Lucía C. Sacco

Red semántica Unidad Nº3

ACTIVIDADES
EXAMEN FINAL

No son para entregar. Son para realizar la revisión de lo trabajado en el cuarto encuentro y corregir durante el quinto encuentro